1, 2, 3... Sciences

Année académique 2016-2017

Mathématiques générales B : corrigé du test 3

Version 25 avril 2017

Test 3 du 02-05-2017

Etudier la convergence des séries suivantes et calculer la somme si elle converge :

a) $\displaystyle\sum_{t=4}^{+\infty} \frac{1}{t^2-4t+3}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sin(\frac{\pi}{6}))^k}{k!}$

Solutions.
a) Comme
$$\sum_{t=4}^{T} \frac{1}{t^2-4t+3} = \sum_{t=4}^{T} \frac{1}{(t-1)(t-3)} = \sum_{t=4}^{T}\left(\frac{-1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t-3)}\right),$$
par décomposition en fractions simples, cette somme s'écrit aussi
$$-\frac{1}{2}\sum_{t=4}^{T}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{t=4}^{T}\frac{1}{t-1} - \sum_{t=4}^{T}\frac{1}{t-3}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\sum_{t=4}^{T}\frac{1}{t-1} - \sum_{t=2}^{T-2}\frac{1}{t-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{T-2}+\frac{1}{T-1}\right).$$
Par définition des séries, on a donc
$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{t=4}^{T}\frac{1}{t^2-4t+3} = \frac{1}{2}\lim_{T\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{T-2}-\frac{1}{T-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Par définition, la série est donc convergente et sa somme vaut $\frac{3}{4}$.

b) La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\sin(\frac{\pi}{6}))^k}{k!}$ est convergente car c'est, au premier terme près, la valeur de la fonction exponentielle en $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. La somme de cette série vaut donc $\exp(\frac{1}{2})-1$.

Test 3 du 05-05-2017

Etudier la convergence des séries suivantes et calculer la somme si elle converge :

a) $\displaystyle\sum_{t=2}^{+\infty}(-1)^{t-3}(\ln(2))^t$ **b)** $\displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{5m}{m^2+2m}$

Solutions.
a) La série $\displaystyle\sum_{t=2}^{+\infty}(-1)^{t-3}(\ln(2))^t$ peut aussi s'écrire sous la forme $\displaystyle-\sum_{t=2}^{+\infty}(-\ln(2))^t$, série géométrique convergente puisque la raison $-\ln(2)\in]-1,1[$.
La somme de cette série vaut $\displaystyle-(\ln(2))^2\,\frac{1}{1-(-\ln(2))} = -\frac{(\ln(2))^2}{1+\ln(2)}$.

b) D'une part, $\displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{5m}{m^2+2m} = \sum_{m=2}^{+\infty}\frac{5}{m+2}$. D'autre part, comme $\frac{5}{m+2}\geqslant\frac{5}{2m}$ (puisque $2\leqslant m$) et que la série harmonique $\displaystyle\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{m}$ diverge, la série donnée diverge.